Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal con n incógnitas

Es cualquier expresión del tipo: $\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b}$, donde a_i, b $\in \mathbb{R}$. Los valores $\mathbf{a_i}$ se denominan **coeficientes**, **b** es el término **independiente** y los valores $\mathbf{x_i}$ son las **incógnitas**.

Solución de una ecuación lineal

Cualquier conjunto de n números reales que sustituidos en las correspondientes incógnitas hacen que se verifique la ecuación se denomina solución de la ecuación.

Ej: Dada la ecuación $x + y + z + t = 0$, son soluciones de ella:

(1,-1,1,-1), (-2,-2,0, 4).

Ecuaciones equivalentes

Son aquellas que tienen la misma solución.

Sistemas de ecuaciones lineales

Es un conjunto de expresiones algebraicas de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

- x_i son las incógnitas, (i = 1,2,...,n).
- a_{ij} son los coeficientes, (i = 1,2,...,m) (j = 1,2,...,n).
- b_i son los términos independientes, (i = 1,2,...,m)
- m, n $\in \mathbb{N}$; m > n, ó, m = n, ó, m < n.

(el número de ecuaciones no tiene por qué ser igual al de incógnitas)

- a_{ij} y $b_i \in \mathbb{N}$.
- Cuando n toma un valor bajo, es usual designar a las incógnitas con las letras x, y, z, t, ...
- Cuando $b_i = 0$ para todo i, el sistema se llama homogéneo.

Solución de un sistema

Es el conjunto de valores que satisface a todas y cada una de las ecuaciones.

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Los **sistemas de ecuaciones equivalentes** son aquellos que tienen la **misma solución**, (aunque tengan distinto número de ecuaciones).

Obtenemos sistemas equivalentes por **eliminación de ecuaciones dependientes. Si:**

Todos los coeficientes son ceros.

Dos filas son iguales.

Una fila es proporcional a otra.

Una fila es combinación lineal de otras.

Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones

1º Si a **ambos miembros** de una ecuación de un sistema **se les suma o se les resta una misma expresión**, el **sistema** resultante es **equivalente**.

2º Si **multiplicamos o dividimos ambos miembros** de las ecuaciones de un sistema **por un número distinto de cero**, el **sistema** resultante es **equivalente**.

3º Si **sumamos o restamos a una ecuación** de un sistema otra ecuación **del mismo sistema**, el **sistema** resultante es **equivalente** al dado.

4º Sin en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumarle varias ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos (combinación lineal de ecuaciones) , resulta otro sistema equivalente al primero.

5º Si en un sistema s**e cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas**, resulta otro **sistema equivalente**.

Obtenemos un sistema equivalente por **transformación de ecuaciones dependientes. si:**

Todos los coeficientes de una ecuación son ceros.

Dos filas (ecuaciones) son iguales.

Una fila (ecuación) es proporcional a otra.

Una fila (ecuación) es combinación lineal de otras filas (ecuaciones).

Clasificación de sistemas de ecuaciones

Atendiendo al número de sus soluciones

Incompatible: No tiene solución.

Compatible: Tiene solución. A su vez puede ser:

Compatible determinado: Solución única.

Compatible indeterminado: Infinitas soluciones.

Sistemas de ecuaciones escalonados

Son aquellos en que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y + 2z &= -1 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Si nos vamos a la 3ª ecuación, tenemos que z=-1.

Sustituyendo su valor en la 2ª obtenemos que y = 1.

Y sustituyendo en la 1ª los valores anteriores tenemos que x= 3.

También es un sistema escalonado:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

Cuando hay más incógnitas que ecuaciones, tomaremos **una de las incógnitas** (por ejemplo la z) y **la pasaremos al segundo miembro transformándola en parámetro.**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y &= 2 - z \end{aligned}$$

Consideraremos **z= λ, siendo λ un parámetro que tomara cualquier valor real.**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y &= 2 - \lambda \end{aligned}$$

La solución será:

x= 2 y = 2-λ   z= λ

Método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente de forma que éste sea escalonado.

Para facilitar el cálculo vamos a transformar el sistema en una **matriz**, en la que pondremos **los coeficientes de las variables y los términos independientes** (separados por una ínea vertical).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & c_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn} & c_n \end{array}\right)$$

Ejemplos

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 4z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Llamamos a cada fila (ecuación) : f_1, f_2, f_3,…… f_n.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) f_3 \to f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2-3f_1} \\ \xrightarrow{f_3-5f_1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+4z=-2 \\ \quad z=1 \end{cases}$$

$y=4z+2=6 \qquad x=1-y+z=-4$

Sistema compatible determinado

$x=-4 \qquad y=6 \qquad z=1$

$$\left.\begin{array}{r} 2x-5y+4z+u-v=-3 \\ x-2y+z-u+v=5 \\ x-4y+6z+2u+v=10 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) f_2 \rightarrow f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2-2f_1} \\ \xrightarrow{f_3-f_1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 31 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x-2y+z-u+v=5 \\ -y+2z+3u-3v=-13 \\ \quad z-3u+6v=31 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado

LLamando

$u=\lambda \qquad v=\mu$

Luego $\boldsymbol{Z=31+3\lambda-6\mu}$, sustituyendo en la segunda ecuación.

$y=13+2(31+3\lambda-6\mu)+3\lambda-3\mu=75+9\lambda-15\mu$

Finalmente, sustituyendo en la 1ª.

$x=5+2(75+9\lambda-15\mu)-75+9\lambda-15\mu+\lambda-\mu=124+16\lambda-25\mu$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ -2x-y+5z=6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \xrightarrow{f_2-3f_1} \\ \xrightarrow{f_3-5f_1} \\ \xrightarrow{f_4+2f_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{f_3-2f_2} \\ \xrightarrow{f_4+f_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \xrightarrow{f_4-7f_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible como se deduce de la última ecuación ya que no tiene solución 0x+0y+0z=-1

Discusión de sistemas de ecuaciones

Discutir un sistema es determinar **si tiene solución** y, caso de tenerla, determinar **si ésta es única**.

Es decir, establecer **si es compatible o incompatible**, y en caso de ser compatible, **si es determinado o indeterminado**.

Discusión de sistemas por el método de Gauss

Ej: estudiar si existe algún valor de m, para el cual el sistema es compatible. Si es así, resolver del sistema para ese valor de m.

$$\begin{cases} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\;f_3 - f_1\;]{\;f_2 - mf_1\;} \left(\begin{array}{cccc} 1 & m & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1-m^2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-m & 0 & \vdots & m \end{array}\right)$$

$$c_3 \to c_2 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & m & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-m & \vdots & m \end{array}\right)$$

$1 - m = 0 \qquad m = 1$

Si $m = 1$ $\qquad 0 = 1 \qquad$ Sistema Incompatible

Si $m \neq 1$ $\qquad$ Sistema Compatible Determinado

A continuación se resuelve para $m \neq 1$ teniendo en cuenta que ya está escalonado.

$$\begin{cases} x + z + my = 1 \\ -z + (1 - m^2)y = 0 \\ (1 - m)y = m \end{cases}$$

$$y = \frac{m}{1-m} \qquad z = (1+m)m \qquad x = \frac{m^3 - m^2 - 2m + 1}{1-m}$$

Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Pasos a seguir:

Leer y comprender el enunciado.

Anotar los datos utilizando: esquemas, dibujos, diagramas de árbol...

Elegir una notación que nos permita relacionar las distintas variables.

Plantear y resolver el sistema.

Comprobar y analizar la solución.

Ej 1:

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 € (sin impuestos). El valor del vino es 60 € menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por El vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592.4 €, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

x = Importe en € de los refrescos.

y = Importe en € de la cerveza.

z = Importe en € del vino.

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x + y - z = 60 \\ \dfrac{6x}{100} + \dfrac{12y}{100} + \dfrac{30z}{100} = 92.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x + y - z = 60 \\ 6x + 12y + 30z = 9240 \end{cases}$$

x=120 € cuestan los refrescos y=160 € la cerveza z=220 € el vino.

Ej 2:

Una empresa tiene tres minas con menas de composiciones:

	Níquel (%)	Cobre (%)	Hierro (%)
Mina A	**1**	**2**	**3**
Mina B	**2**	**5**	**7**
Mina C	**1**	**3**	**1**

¿Cuántas toneladas de cada mina deben utilizarse para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro?

x = nº de toneladas de la mina A.

y = nº de toneladas de la mina B.

z = nº de toneladas de la mina C.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{100} + \dfrac{2y}{100} + \dfrac{z}{100} = 7 \\ \dfrac{2x}{100} + \dfrac{5y}{100} + \dfrac{3z}{100} = 18 \\ \dfrac{3x}{100} + \dfrac{7y}{100} + \dfrac{z}{100} = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{cases}$$

x=200 t de la mina 1 y=100 t de la mina 2 z=300 t de la mina 3.

Ej 3:

Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

- **El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.**
- **El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.**
- **El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.**

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

x = Peso del 1er lingote.

y = Peso del 2º lingote.

z = Peso del 3er lingote.

En el 1er lingote, la ley del oro es: 20/90 = 2/9

En el 2º lingote, la ley del oro es: 30/120 = 1/4

En el 3 ^{er} lingote, la ley del oro es: 40/180 = 2/9

La ecuación para el oro es:

$$\frac{2x}{9}+\frac{y}{4}+\frac{2z}{9}=34$$

En el 1er lingote, la ley de la plata es: 30/90 = 1/3

En el 2º lingote, la ley de la plata es: 40/120 = 1/3

En el 3 ^{er} lingote, la ley de la plata es: 50/180 = 5/18

La ecuación para el plata es:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{5z}{18}=46$$

En el 1er lingote, la ley del cobre es: 40/90 = 4/9

En el 2ºlingote, la ley del cobre es: 50/120 = 5/12

En el 3 ^{er} lingote, la ley del cobre es: 90/180 = 1/2

La ecuación para el cobre es:

$$\frac{4x}{9}+\frac{5y}{12}+\frac{z}{2}=67$$

el sistema será:

$$\begin{cases} 8x+9y+8z=1224 \\ 6x+6y+5z=828 \\ 16x+15y+18z=2412 \end{cases}$$

x = 45 g del 1º lingote **y = 48** g del segundo **z = 54** g del tercero.

Ej 4:

La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

x = Edad actual del padre.

y = Edad actual del hijo mayor.

z = Edad actual del hijo menor.

Relación actual: $x = 2(y + z)$

Hace y - z años: $x - (y - z) = 3[y - (y - z) + z - (y - z)]$

Dentro de y + z: $x + (y + z) + y + (y + z) + z + (y + z) = 150$

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 8z = 0 \\ x + 4y + 4z = 150 \end{cases}$$

$x = 50$ $y = 15$ $z = 10$

Al nacer los hijos, el padre tenía **35 y 40 años**, respectivamente.

Ej 5:

Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo.

Cada volumen de trigo se vende por 4 €, el de la cebada por 2 € y el de mijo por 0.5 €.

Si se vende 100 volúmenes en total y si obtiene por la venta 100 €, ¿cuántos volúmenes de cada especie se venden?

x = Volumen de trigo.

y = Volumen de cebada.

z = Volumen de mijo.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 4x + 2y + 0.5z = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 100 - x \\ 4y + z = 200 - 8x \end{cases}$$

$$y = \frac{100 - 7x}{3} \qquad z = \frac{200 + 4x}{3}$$

Considerando que las tres variables son números naturales, y que su suma es 100, obtenemos las siguientes soluciones:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
x	**1**	**4**	**7**	**10**	**13**
y	**31**	**24**	**17**	**10**	**3**
z	**68**	**72**	**76**	**80**	**84**